

ΜΑΘΗΜΑ 29

2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ Θ.Μ.Τ

Θεωρία – Σχόλια - Μέθοδοι
Ασκήσεις εύρεσης συνάρτησης
από παράγωγο

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Θεώρημα

Συνάρτηση f , αν

- είναι συνεχής σε διάστημα Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

τότε είναι σταθερή στο Δ .

Ισχύει και αντίστροφα για παραγωγίσιμες συναρτήσεις:

Αν $f(x) = c$ σε διάστημα Δ , τότε $f'(x) = 0$

2.

Θεώρημα

Συναρτήσεις f, g , αν

- είναι συνεχείς σε διάστημα Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

τότε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$, όπου c σταθερός αριθμός

Ισχύει και αντίστροφα για παραγωγίσιμες συναρτήσεις:

Αν $f(x) = g(x) + c$ σε διάστημα Δ , τότε $f'(x) = g'(x)$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Παρατήρηση

Στα θεωρήματα της παραγράφου μας, το πεδίο ορισμού είναι διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων.

2.

Μέθοδος

Αυτά τα δύο θεωρήματα μας εξυπηρετούν στην εύρεση του τύπου συνάρτησης.

3.

Εφαρμογή σαν θεώρημα

Για παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει η ισοδυναμία :

$$f'(x) = f(x) \text{ σε διάστημα } \Delta \Leftrightarrow f(x) = c e^x \text{ στο } \Delta$$

Απόδειξη

$$\text{Για κάθε } x \in \Delta \text{ έχουμε } f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0$$

Να θυμόμαστε αυτή την ενέργεια

$$f'(x) e^{-x} - f(x) e^{-x} = 0 \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) e^{-x} + f(x)(e^{-x})' = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε με
 e^x ή e^{-x} ή $e^{g(x)}$

$$(f'(x) e^{-x})' = 0$$

$$f(x) e^{-x} = c$$

$$f(x) = c e^x$$

4.

Μέθοδος

Όταν δίνεται $f(x) > 0$, υποψιαζόμαστε $(\ln f(x))'$.

5.

Μέθοδος

Το γινόμενο $f(x) f'(x)$ οδηγεί στη $\left([f(x)]^2\right)'$

6.

Μέθοδος

Η διαφορά $f'(x)x - f(x)$ οδηγεί στη $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'$, αφού πρώτα διαιρέσουμε με x^2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f'(0) = 2.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της.

Προτεινόμενη λύση

$$f'(0) = 2 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 2 \quad (1)$$

Η υπόθεση $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ (2) για $x = y = 0$ δίνει

$$f(0+0) = f(0) + f(0) + 0$$

$$f(0) = 2f(0)$$

$$f(0) = 0$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &\stackrel{(2)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + f(h) + x_0 h - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + x_0 h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h)}{h} + x_0 \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + x_0 = 2 + x_0 \end{aligned}$$

Άρα $f'(x_0) = 2 + x_0$ και επειδή x_0 τυχαίο, θα είναι $f'(x) = 2 + x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Άρα} \quad f'(x) = \left(2x + \frac{x^2}{2} \right)' \Rightarrow f(x) = 2x + \frac{x^2}{2} + c \quad (3)$$

$$\text{Αλλά} \quad f(0) = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} 2 \cdot 0 + \frac{0^2}{2} + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$(2) \Rightarrow f(x) = 2x + \frac{x^2}{2}$$

Παράγωγος = 0 ή
παράγωγος = παράγωγος

2.

Για παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι $4f(x) + 2f'(x) = 5$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f'(x)}{e^{-2x}}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

iii) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f , g .

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\text{Η υπόθεση } 4f(x) + 2f'(x) = 5, x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2f'(x) = 5 - 4f(x) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{5 - 4f(x)}{2}$$

Η f' λοιπόν προκύπτει από πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα είναι παραγωγίσιμη. Οπότε η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

ii)

Η g είναι παραγωγίσιμη σαν λόγος παραγωγίσιμων.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $g'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{f'(x)}{e^{-2x}} &\Rightarrow g'(x) = \frac{f''(x)e^{-2x} - f'(x)(e^{-2x})'}{(e^{-2x})^2} \\ &= \frac{f''(x)e^{-2x} + 2f'(x)e^{-2x}}{(e^{-2x})^2} \\ &= \frac{f''(x) + 2f'(x)}{e^{-2x}} \end{aligned}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f''(x) + 2f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Η υπόθεση } 4f(x) + 2f'(x) = 5, x \in \mathbb{R} &\Rightarrow (4f(x) + 2f'(x))' = 0, \\ &4f'(x) + 2f''(x) = 0 \\ &2f'(x) + f''(x) = 0 \end{aligned}$$

iii)

$$g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c \text{ στο } \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\frac{f'(x)}{e^{-2x}} = c$$

$$f'(x) = c e^{-2x}$$

$$2f'(x) = 2c e^{-2x},$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} 5 - 4f(x) = 2c e^{-2x}$$

$$4f(x) = 5 - 2c e^{-2x} \quad (3)$$

$$\text{Η (3) για } x = 0 \Rightarrow 4f(0) = 5 - 2c e^{-2 \cdot 0}$$

$$4 \cdot 0 = 5 - 2c \cdot 1$$

$$c = \frac{5}{2}$$

Η (3) γίνεται $4f(x) = 5 - 5e^{-2x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}e^{-2x}$

Και η (2) γίνεται $g(x) = \frac{5}{2}$

3.

Η αξία ενός αυτοκινήτου μειώνεται συνεχώς με ρυθμό που είναι ανάλογος της τιμής του. Αν το αυτοκίνητο πωλείται 16000 € και η αξία του 3 χρόνια μετά είναι 12000 €, να βρείτε την αξία του 6 χρόνια μετά την πώλησή του.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $A = A(t)$, $t \geq 0$ (και $A(t) > 0$) η συνάρτηση που εκφράζει την αξία του αυτοκινήτου συναρτήσει του χρόνου t (σε έτη).

Δίνεται $A'(t) = -k \cdot A(t)$, όπου $k > 0$ σταθερά

Για $t = 0$: $A(0) = 16000$ €

Για $t = 3$: $A(3) = 12000$ €

Αναζητάμε την τιμή $A(6)$

$$A'(t) = -k \cdot A(t) \Rightarrow \frac{A'(t)}{A(t)} = -k$$

$$(\ln A(t))' = (-kt)'$$

$$\ln A(t) = -kt + c$$

$$A(t) = e^{-kt+c}$$

$$A(t) = e^{-kt} \cdot e^c \quad (1)$$

$$A(0) = 16000 \Rightarrow e^{-k \cdot 0} \cdot e^c = 16000 \Rightarrow e^c = 16000$$

$$A(3) = 12000 \Rightarrow e^{-k \cdot 3} \cdot e^c = 16000$$

$$e^{-3k} 16000 = 12000$$

$$e^{-3k} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$(e^{-k})^3 = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$e^{-k} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Η (1)} \Rightarrow A(t) = e^{-kt} \cdot e^c = (e^{-k})^t 16000 = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}t} 16000$$

$$\text{Άρα } A(6) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3} \cdot 6} 16000 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 16000 = \frac{9}{16} 16000 = 9000 \text{ €}$$

Σχόλιο 4

4.

Για συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, δίνεται ότι $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η C_f εφάπτεται της ευθείας $y = 2x - e$. Να βρείτε την f .

Προτεινόμενη λύση

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + 1$

$$f'(x)x = f(x) + x$$

$$f'(x)x - f(x) = x$$

$$\frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x'}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Σχόλιο 6

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (\ln x)'$$

$$\frac{f(x)}{x} = \ln x + c$$

$$f(x) = x \ln x + cx \quad (1)$$

Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Θα έχουμε

$$f(x_0) = 2x_0 - e \quad \text{και} \quad f'(x_0) = 2 \quad (2)$$

$$\text{Η (1) για } x = x_0 \Rightarrow f(x_0) = x_0 \ln x_0 + cx_0$$

$$\text{Η (1) } \Rightarrow f'(x) = (x \ln x + cx)' = \ln x + 1 + c \quad \text{και για } x = x_0 \\ f'(x_0) = \ln x_0 + 1 + c$$

$$\text{Η (2) γίνεται } x_0 \ln x_0 + cx_0 = 2x_0 - e \quad \text{και} \quad \ln x_0 + 1 + c = 2$$

$$x_0 \ln x_0 + cx_0 = 2x_0 - e \quad \text{και} \quad \ln x_0 = 1 - c$$

$$x_0(1 - c) + cx_0 = 2x_0 - e \quad \text{και} \quad \ln x_0 = 1 - c$$

$$x_0 - cx_0 + cx_0 = 2x_0 - e \quad \text{και} \quad \ln x_0 = 1 - c$$

$$x_0 = e \quad \text{και} \quad \ln e = 1 - c$$

$$x_0 = e \quad \text{και} \quad 0 = c$$

$$\text{Η (1) γίνεται } f(x) = x \ln x, \quad x \in (0, +\infty)$$

5.

Να βρείτε τον τύπο παραγωγίσιμης συνάρτησης $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ τέτοια, ώστε $xf'(x) - f(x) \ln f(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $f(1) = e$.

Προτεινόμενη λύση

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $xf'(x) - f(x) \ln f(x) = 0$

$$x \frac{f'(x)}{f(x)} - \ln f(x) = 0$$

$$(\ln f(x))' x - \ln f(x) x' = 0$$

$$\frac{(\ln f(x))' x - \ln f(x) x'}{x^2} = 0$$

Σχόλιο 6

$$\left(\frac{\ln f(x)}{x} \right)' = 0$$

$$\frac{\ln f(x)}{x} = c \quad (1)$$

$$\text{Η (1) για } x=1 \Rightarrow \frac{\ln f(1)}{1} = c \Rightarrow \frac{\ln e}{1} = c \Rightarrow 1 = c$$

$$\text{Η (1) γίνεται } \frac{\ln f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \ln f(x) = x \Rightarrow f(x) = e^x$$

6.

Για συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, δίνεται ότι $xf'(x) - f(x) = x \sin x - \eta \mu x$ για κάθε $x > 0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Να βρείτε την f .

Προτεινόμενη λύση

για κάθε $x > 0$ είναι $xf'(x) - f(x) = x \sin x - \eta \mu x$

$$f'(x) \cdot x - x' f(x) = (\eta \mu x)' \cdot x - \eta \mu x \cdot x'$$

$$\frac{f'(x) \cdot x - x' f(x)}{x^2} = \frac{(\eta \mu x)' \cdot x - \eta \mu x \cdot x'}{x^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)'$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\eta \mu x}{x} + c \Rightarrow f(x) = \eta \mu x + cx$$

Σχόλιο 6

$$\text{Αλλά } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \eta \mu \frac{\pi}{2} + c \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow 1 + c \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow c = 0$$

Άρα $f(x) = \eta \mu x$

7.

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δίνεται ότι

$$f'(x) - f(x) = e^x (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(0) = -1$, να βρείτε την f .

Προτεινόμενη λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) - f(x) = e^x (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$

Να θυμόμαστε .

Η διαφορά

$f'(x) - f(x)$

απαιτεί e^{-x}

$$f'(x) e^{-x} - f(x) e^{-x} = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$$

$$f'(x) e^{-x} + f(x) (e^{-x})' = (-\sigma\upsilon\nu x)' - (\eta\mu x)'$$

$$(f(x) e^{-x})' = (-\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)'$$

$$f(x) e^{-x} = -\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + c \quad (1)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ η } (1) \Rightarrow f(0) e^{-0} = -\sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0 + c$$

$$f(0) = -1 + c$$

$$-1 = -1 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Η } (1) \text{ γίνεται } f(x) e^{-x} = -\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

$$f(x) = -e^x (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)$$

8.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε την ισοδυναμία :

$$f'(x) = (2x + 1) f(x) \Leftrightarrow \text{υπάρχει } c \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο, ώστε } f(x) = c e^{x^2 + x}$$

Προτεινόμενη λύση

1^{ος} τρόπος

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f'(x) = (2x + 1) f(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1$$

$$(\ln f(x))' = (x^2 + x)'$$

$$\ln f(x) = x^2 + x + \alpha, \text{ όπου } \alpha \text{ σταθερά}$$

$$f(x) = e^{x^2 + x + \alpha}$$

$$f(x) = e^{x^2 + x} e^{\alpha} \text{ θέτουμε } e^{\alpha} = c$$

$$f(x) = c e^{x^2 + x}$$

2^{ος} τρόπος

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f'(x) - (2x + 1) f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

Σχόλιο 7

Είπαμε,
να θυμόμαστε
αυτή την ενέργεια

$$f'(x) e^{-(x^2 + x)} - (2x + 1) e^{-(x^2 + x)} f(x) = 0 \cdot e^{-(x^2 + x)}$$

$$f'(x) e^{-(x^2 + x)} + f(x) (e^{-(x^2 + x)})' = 0$$

$$(f(x) e^{-(x^2 + x)})' = 0$$

$$f(x) e^{-(x^2 + x)} = c$$

$$f(x) = c e^{x^2 + x}$$

Παρατήρηση: Ο 2^{ος} τρόπος καλύπτει και την περίπτωση, κατά την οποία οι τιμές της x ανήκουν στο $\mathbb{R}$ και όχι μόνο στο $(0, +\infty)$.

9.

Έστω f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις ώστε να ισχύουν :

α) $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f'(x) + g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) $g(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) $f(1) = 1$ και $g(1) = 0$

Να αποδείξετε ότι η C_f είναι η ευθεία $y = 1$

Προτεινόμενη λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f'(x) + g'(x)$

$$[f(x)g(x)]' = [f(x) + g(x)]' \quad \text{στο διάστημα } \mathbb{R}$$

$$f(x)g(x) = f(x) + g(x) + c \quad (1)$$

Η (1) για $x = 1 \Rightarrow f(1)g(1) = f(1) + g(1) + c$

$$1 \cdot 0 = 1 + 0 + c \Rightarrow c = -1$$

Η (1) γίνεται $f(x)g(x) = f(x) + g(x) - 1$

$$f(x)g(x) - f(x) - g(x) + 1 = 0$$

$$f(x)[g(x) - 1] - [g(x) - 1] = 0$$

$$[g(x) - 1][f(x) - 1] = 0 \quad (2)$$

Πρέπει να εξαφανίσουμε τη g

Επειδή όμως, $g(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $g(x) - 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

η (2) $\Rightarrow f(x) - 1 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η C_f είναι η ευθεία $y = 1$

10.

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει

$$(f(x) - \sin x)(f'(x) + \eta \mu x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και } f(0) = 1.$$

Να βρείτε την f .

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } (f(x) - \sin x)(f'(x) + \eta \mu x) = 0$$

$$(f(x) - \sin x)(f'(x) - (\sin x)') = 0$$

Σχόλιο 5

$$(f(x) - \sin x)(f(x) - \sin x)' = 0$$

$$2(f(x) - \sin x)(f(x) - \sin x)' = 0$$

$$([f(x) - \sin x]^2)' = 0$$

$$[f(x) - \sin x]^2 = c \quad (1)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ η (1)} \Rightarrow [f(0) - \sin 0]^2 = c \Rightarrow [1 - 1]^2 = c \Rightarrow 0 = c$$

$$\text{Η (1) γίνεται } [f(x) - \sin x]^2 = 0$$

$$f(x) - \sin x = 0$$

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

11.

Συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(x) + f'(x) \ln x^x = 1 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Προτεινόμενη λύση

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $f(x) + f'(x) \ln x^x = 1$

$$f(x) + f'(x) x \ln x = 1$$

$$\frac{1}{x} f(x) + f'(x) \ln x = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)' f(x) + f'(x) \ln x = (\ln x)'$$

$$(f(x) \ln x)' = (\ln x)'$$

$$f(x) \ln x = \ln x + c \quad \textbf{(A)}$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ η (A)} \Rightarrow f(1) \ln 1 = \ln 1 + c$$

$$f(1) \cdot 0 = 0 + c$$

$$0 = c$$

$$\text{Η (A) γίνεται } f(x) \ln x = \ln x \quad \textbf{(B)}$$

$$\text{Για κάθε } x \neq 1, \text{ δηλαδή } \ln x \neq 0, \text{ η (B) γίνεται } f(x) = 1 \quad \textbf{(Γ)}$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ η υπόθεση } f(x) + f'(x) \ln x^x = 1 \Rightarrow f(1) + f'(1) \ln 1 = 1$$

$$f(1) + f'(1) \cdot 0 = 1$$

$$f(1) = 1 \quad \textbf{(Δ)}$$

Από τις (Γ), (Δ) συμπεραίνουμε $f(x) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

12.

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $xf(x)f'(x) = 2$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $f(e) = 2$. Να βρείτε την f .

Προτεινόμενη λύση

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχουμε $xf(x)f'(x) = 2$

$$f(x)f'(x) = 2 \frac{1}{x}$$

Σχόλιο 5

$$2f(x)f'(x) = 4 \frac{1}{x}$$

$$([f(x)]^2)' = 4(\ln x)'$$

$$([f(x)]^2)' = (4\ln x)'$$

$$[f(x)]^2 = 4\ln x + c \quad (1)$$

$$\text{Η (1) για } x = e \Rightarrow [f(e)]^2 = 4\ln e + c$$

$$2^2 = 4 \cdot 1 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Η (1) γίνεται } [f(x)]^2 = 4\ln x$$

$$f(x) = 2\sqrt{\ln x} \quad \text{ή} \quad f(x) = -2\sqrt{\ln x}, \quad x \in (1, +\infty) \quad (2)$$

Η f δε μηδενίζεται στο $(1, +\infty)$, διότι αν για κάποιο x ήταν $f(x) = 0$, από την υπόθεση $xf(x)f'(x) = 2$ θα είχαμε $0 = 2$, που είναι άτοπο.

Και επειδή f συνεχής, αφού είναι παραγωγίσιμη, θα διατηρεί πρόσημο.

Έχοντας όμως $f(e) = 2 > 0$, προκύπτει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Οπότε, από τη (2) παίρνουμε $f(x) = 2\sqrt{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$

13.

- i) Δίνεται συνάρτηση g , για την οποία ισχύει $g'(x) = kg(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου k κάποια σταθερά. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\omega(x) = \frac{g(x)}{e^{kx}}$ είναι σταθερή.
- ii) Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $x[f'(x) - f(x)] \ln x = f(x)(x \ln x - \ln x - 1)$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $f(e) = e^{2e}$. Να βρείτε την f .

Προτεινόμενη λύση**i)**Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\omega'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}\omega'(x) &= \frac{g'(x)e^{kx} - g(x)(e^{kx})'}{(e^{kx})^2} = \frac{g'(x)e^{kx} - g(x)ke^{kx}}{(e^{kx})^2} \\ &= \frac{e^{kx}[g'(x) - kg(x)]}{(e^{kx})^2} \\ &= \frac{e^{kx} \cdot 0}{(e^{kx})^2} = 0\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\text{Για κάθε } x \in (1, +\infty): \quad x[f'(x) - f(x)] \ln x &= f(x)(x \ln x - \ln x - 1) \\ x f'(x) \ln x - x f(x) \ln x &= f(x) x \ln x - f(x) - f(x) \ln x \\ f'(x) x \ln x + f(x) \ln x + f(x) &= 2f(x) x \ln x\end{aligned}$$

Προσαρμογή στο (i)	$\begin{aligned}f'(x) x \ln x + f(x) x' \ln x + f(x) x \frac{1}{x} &= 2f(x) x \ln x \\ f'(x) x \ln x + f(x) x' \ln x + f(x) x (\ln x)' &= 2f(x) x \ln x \\ (f(x) x \ln x)' &= 2f(x) x \ln x\end{aligned}$
--------------------	---

Κατά το (i) θα είναι $\frac{f(x) x \ln x}{e^{2x}} = c$

$$f(x) = c \frac{e^{2x}}{x \ln x} \quad (1)$$

Για $x = e$, η (1) $\Rightarrow f(e) = c \frac{e^{2e}}{e \ln e} = c e^{2e-1}$

Αλλά $f(e) = e^{2e}$, οπότε $e^{2e} = c e^{2e-1} \Rightarrow c = e$

Η (1) γίνεται $f(x) = e \frac{e^{2x}}{x \ln x} = \frac{e^{2x+1}}{x \ln x}$

14.

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f έτσι ώστε

$$f'(0) = f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f''(x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f''(x) = -f(x)$

Η f' συνδέει την f με την f''

$$f'(x) f''(x) = -f(x) f'(x)$$

$$2f'(x) f''(x) + 2f(x) f'(x)$$

$$([f'(x)]^2)' + ([f(x)]^2)' = 0$$

$$([f'(x)]^2 + [f(x)]^2)' = 0$$

$$[f'(x)]^2 + [f(x)]^2 = c \quad (1)$$

$$\text{Για } x = 0, \text{ η (1) } \Rightarrow [f'(0)]^2 + [f(0)]^2 = c \Rightarrow 0 + 0 = c \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Η (1) γίνεται } [f'(x)]^2 + [f(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{και} \quad f(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = c \quad \text{και} \quad f(x) = 0 \quad \text{και επειδή } f(0) = 0 \text{ είναι } c = 0$$

$$\text{άρα τελικά είναι } f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$